На правах рукописи

Винокур Вадим Вильямович

УДК 517.95

РЕЗОНАНСНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

01.01.02. – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

В. Винокур

ЕКАТЕРИНБУРГ – 2001

Работа выполнена в Челябинском государственном университете на кафедре вычислительной математики

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор В.Н. Павленко.
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук, профессор А.И. Короткий кандидат физико-математических наук, доцент А.С. Макаров
Ведущая организация	Южно-Уральский государственный университет

Защита состоится "19" сентября 2001 года в 15 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета К 212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Уральском государственном университете имени А.М. Горького по адресу:

620083, Екатеринбург, просп. Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Уральского государственного университета.

Автореферат разослан "17" августа 2001г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических
наук, доцент В.Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Объектом исследования диссертационной работы является краевая задача вида

$$Lu(x) + g(x, u(x)) = p(x), \ x \in \Omega, \tag{0.1}$$

$$Bu\,|_\Gamma = 0, \tag{0.2}$$

где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ класса $C_{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $Lu(x) \equiv -\sum\limits_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j(x)u_{x_j} + c(x)u(x)$ – равномерно эллиптический дифференциальный оператор на $\overline{\Omega}$ с коэффициентами $a_{ij}, b_j \in C_{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $c \in C_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Нелинейность $g(x,u)$ удовлетворяет условию (*):

$g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – борелева $\pmod 0$, т.е. существует борелева функция $\tilde{g} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и измеримое множество $l \subset \Omega \times \mathbb{R}$, проекция которого на Ω имеет меру нуль в $\mathbb{R}^n$, такие, что $\tilde{g} = g$ на $\Omega \times \mathbb{R} \setminus l$ и для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x, \cdot)$ имеет на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода и $g(x,u) \in [g_-(x,u), g_+(x,u)]$, $g_-(x,u) = \liminf_{s \to u} g(x,s)$, $g_+(x,u) = \limsup_{s \to u} g(x,s)$;

$p(x)$ – суммируемая на Ω функция; (0.2) – одно из основных краевых условий:

$$u\,|_\Gamma = 0, \tag{0.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_L}\,|_\Gamma \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} \cos(n, x_j) \cdot|_\Gamma = 0, \tag{0.4}$$

$\cos(n, x_j)$ – направляющие косинусы внешней нормали n к границе Γ;

$$\frac{\partial u}{\partial n_L}(x) + \sigma(x)u(x)\,|_\Gamma = 0, \tag{0.5}$$

функция $\sigma \in C_{1,\alpha}(\Gamma)$ неотрицательная и не равна тождественно нулю на Γ.

Сильным решением задачи (0.1)–(0.2) называется функция $u \in W_q^2(\Omega)$, $q \geq 1$, которая удовлетворяет уравнению (0.1) для почти всех $x \in \Omega$ и для нее след $Bu(x)$ на границу Γ области Ω равен нулю.

Сильное решение задачи (0.1)–(0.2) называется *полуправильным*, если для почти всех $x \in \Omega$ значения $u(x)$ являются точками непрерывности сечения $g(x, \cdot)$

В диссертации исследуется вопрос о существовании сильных и полуправильных решений в так называемом резонансном случае, когда задача

$$Lu = 0 \tag{0.6}$$

$$Bu\mid_\Gamma = 0 \tag{0.7}$$

имеет ненулевое решение. Предполагается, что для нелинейности $g(x, u)$ для почти всех $x \in \Omega$ верна оценка

$$|g(x, u)| \leq a(x)\ \forall u \in \mathbb{R}, \tag{0.8}$$

где $a \in L_q(\Omega)$, $q \geq 2n/(n+2)$.

В случае, когда $g(x, u)$ гладкая, резонансная задача (0.1)–(0.2) изучалась многими авторами, начиная с пионерской работы Ландесмана и Лазера. Нерезонасные эллиптические краевые задачи с разрывными нелинейностями также изучались рядом ученых (Красносельский М.А. и его ученики, K.C. Chang, S. Carl, S. Heikila, В.Н. Павленко и другие). Проблема же существования сильных решений резонансной задачи (0.1)–(0.2) в ситуации, когда нелинейность $g(x, u)$ разрывна по фазовой пременной u мало изучена. В связи с этим разработка общих подходов и методов исследования таких задач актуальна.

<u>Цель работы.</u> Разработка общих подходов и методов исследования задачи (0.1)–(0.2) в резонансном случае. Получение на этой

основе новых результатов существования сильных и полуправильных решений таких задач.

Методы исследования. В работе применительно к рассматриваемому классу задач разработан вариационный подход. При получении общих результатов используются также методы регуляризации и теория топологической степени для многозначных компактных полей.

Научная новизна. В работе получены новые общие теоремы о существовании решений уравнений с некоэрцитивными разрывными операторами, в том числе существование таких решений, которые являются точками непрерывности оператора уравнения. На основе общих результатов доказываются новые теоремы существования сильных и полуправильных решений задачи (0.1)–(0.2).

Практическая значимость. Основные результаты диссертационной работы имеют теоретическое значение. Полученные результаты могут быть применены для исследования известных и новых классов эллиптических резонансных краевых задач с разрывными нелинейностями.

Аппробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на XXXVI международной научной студенческой конференции в Новосибирске (1998 г.), на зимней и весенней Воронежской математической школе (1999 г.), на международной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения" в Челябинске (1999 г.), на международном симпозиуме посвященном 150-летию со дня рождения Софьи Ковалевской в Санкт-Петербурге (2000 г.), на Всероссийской научной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач" в Екатеринбурге (2001 г.), на семинаре по дифференциальным уравнениям в Челябинском Государственном университете.

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 10 работ. Список работ приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Работа содержит 107 страниц, включая библиографический список из 77 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится постановка задачи, обоснование ее актуальности, сделан краткий обзор опубликованных работ, имеющих отношение к теме диссертации и сравнение полученных в диссертации результатов с известными. Приведено описание используемой в работе методики исследования. Здесь же излагается краткое содержание диссертации.

В первой главе диссертации формулируются и доказываются новые вариационные принципы, которые в первой части третьей главы применяются к задаче (0.1)–(0.2) для доказательства предложений типа Ланденсмана-Лазера в случае формальной самосопряженности оператора L. Исследуется операторная постановка задачи (0.1)–(0.2), имеющая вид

$$Qx \equiv \Lambda Ax + P^*TPx - \Lambda p = 0, \tag{1.1}$$

где A – линейный ограниченный самосопряженный оператор в X с ненулевым ядром $N(A)$, отображение $T : Y \to Y^*$ квазипотенциальное и ограниченное на Y (возможно, разрывное), $p \in X$. Квазипотенциальность оператора T означает существование функционала $f : Y \to \mathbb{R}$ такого, что для любых x и $h \in Y$

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \langle T(x+th), h\rangle\, dt,$$

где $< z, y >$ обозначает значение линейного ограниченного функционала $z \in Y^*$ на элементе $y \in Y$. При этом f называют квазипотенциалом оператора T.

Приведем формулировки установленных вариационных принципов.

Теорема 1.1.1. *Предположим, что*

1) X – вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, компактно вложенное в рефлексивное банахово пространство Y, и P – оператор вложения X в Y;

2) оператор $A: X \to X$ линейный, ограниченный и самосопряженный, нуль является изолированной точкой его спектра, причем $(Ax,x) \geq 0$ $\forall x \in X$;

3) отображение $T: Y \to Y^*$ квазипотенциальное и ограниченное на Y, т.е. существует константа $M > 0$, для которой $\|Tx\| \leq M$ $\forall x \in Y$;

4) элемент $p \in X$ удовлетворяет условию

$$\lim_{x \in N(A), \|x\| \to +\infty} (f(x) - (p,x)) = +\infty, \tag{1.3}$$

где f – квазипотенциал оператора T.

Тогда существует $x_0 \in X$, для которого

$$\varphi(x_0) = \inf_X \varphi(x), \ \varphi(x) = (Ax,x)/2 + f(x) - (p,x),$$

причем любое такое x_0 удовлетворяет включению

$$-\Lambda A x_0 + \Lambda p \in P^*(ST)(Px_0), \tag{1.4}$$

где ST – секвенциальное замыкание оператора T[1]*. Если дополнительно предположить, что все точки разрыва оператора* (1.1) *регу-*

[1]Секвенциальным замыканием локально ограниченного оператора $T: E_1 \to E_2$ (E_i–банаховы пространства, $i = 1,2$) называется отображение ST из E_1 в 2^{E_2}, значение STx ($x \in E_1$) которого совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества всех слабо предельных точек последовательностей вида (Tx_n) в E_2, где x_n сильно сходится к x в E_1. Здесь через 2^X обозначается множество всех подмножеств X.

лярные[2] *для* Q, *то любое такое* x_0 *удовлетворяет уравнению* (1.1) *и является точкой радиальной непрерывности оператора* P^*TP.

Теорема 1.1.2. *Предположим, что*

1) X *– вещественное гильбертово пространство, непрерывно вложенное в рефлексивное банахово пространство* Y, *и* P *– оператор вложения* X *в* Y;

2) отображение $T : Y \to Y^*$ *квазипотенциальное, монотонное и ограниченное на* Y;

3) выполнены условия 2) и 4) теоремы 1.1.1.

Тогда справедливо заключение теоремы 1.1.1.

В отличие от предыдущей теоремы в данном предложении не предполагается компактность вложения X в Y, однако, от оператора T дополнительно требуется монотонность на X.

Во второй главе диссертации рассматривается уравнение вида

$$Au + Tu = f, \tag{2.1}$$

где $A : H \to H$ – линейное фредгольмово отображение нулевого индекса, что означает замкнутость области значений $R(A)$ оператора A, конечномерность ядра $\ker A$ и равенство размерностей $\ker A$ и $\ker A^*$; H – гильбертово пространство, оператор $T : H \to H$ компактный (возможно, разрывный) удовлетворяет условию

$$Tu/\|u\| \to 0 \text{ при } \|u\| \to +\infty, \tag{2.2}$$

[2]Элемент $x \in X$ называется регулярной точкой для оператора $Q : X \to X^*$, если существует $h \in X$ для которого

$$\limsup_{t \to +0} \langle Q(x + th), h \rangle < 0.$$

$f \in H$. Дополнительно предполагается, что оператор A принадлежит классу $(S)_+$, то есть для произвольной последовательности $(u_n) \subset H$ из $u_n \rightharpoonup u_0$ и

$$\limsup_{n\to\infty} (Au_n, u_n - u_0) \leq 0 \tag{2.3}$$

следует сильная сходимость (u_n) к u_0 в H. Через (x, y) обозначается скалярное произведение элементов x, y из H.

Доказывается теорема о разрешимости уравнения (2.1) с помощью регуляризации и теории топологической степени для многозначных компактных полей в гильбертовом пространстве. Кроме того, устанавливается существование таких решений абстрактных уравнений, которые являются точками непрерывности оператора T. Полученные общие результаты позволяют доказать во второй части третьей главы теоремы существования сильных и полуправильных решений задачи (0.1)–(0.2) без предположения о формальной самосопряженности дифференциальной части уравнения (0.1).

Ниже приводится ряд вспомогательных определений и непосредственно сама формулировка основного результата второй главы.

Определение 2.1.2. *Будем говорить, что для элемента $f \in H$ в уравнении (2.1) выполнено (i) условие, если существует линейный изоморфизм M между* $\ker A$ *и* $\ker A^*$ *такой, что для любой последовательности $(u_k) \subset H$, $\|u_k\| \to +\infty$, $\|u_k\|^{-1} \cdot u_k \to v \in \ker A$ имеет место неравенство*

$$\limsup_{k\to\infty} (Tu_k, Mv) > (f, Mv)\,, \tag{2.4}$$

или же для каждой такой последовательности

$$\liminf_{k\to\infty} (Tu_k, Mv) < (f, Mv)\,, \tag{2.5}$$

Теорема 2.2.1. *Пусть выполнены условия:*

1) *линейный оператор $A : H \to H$ (H - гильбертово пространство) - фредгольмов, нулевого индекса и принадлежит классу $(S)_+$;*

2) *отображение $T : H \to H$ компактное и удовлетворяет условию (2.2);*

3) *для элемента $f \in H$ выполнено условие (i).*

Тогда найдется $u_0 \in H$, удовлетворяющее включению $f - Au \in STu$, где ST - секвенциальное замыкание оператора T. Если дополнительно предположить, что точки разрыва оператора $Qu = Au + Tu - f$ сильно регулярные, то u_0 - решение уравнения (2.1) и точка непрерывности оператора T.

В **третьей** главе диссертации результаты, полученные в первой и второй главах применяются для доказательства сильных и полуправильных решений задачи (0.1)–(0.2) и доказательства предложений типа Ландессмана-Лазера.

В **первом параграфе третьей главы** рассматриваются применения к задаче (0.1)–(0.2) вариационных принципов, доказанных в первой главе диссертации. Приведем необходимые обозначения и определения, а также саму формулировку доказанной теоремы.

Определение 3.1.6. *Говорят, что для уравнения (0.1) выполнено A-условие (сильное A-условие), если*

1) *выполняется (*);*

2) *найдется не более чем счетное семейство поверхностей $\{S_i, i \in I\}, S_i = \{(x,u) \in \mathbb{R}^{n+1} | u = \varphi_i(x), x \in \Omega\}, \varphi_i \in W^2_{loc,1}(\Omega)$, таких, что для почти всех $x \in \Omega$ неравенство $g(x, u-) < g(x, u+)$*

$(g(x,u-)\neq g(x,u+))$ влечет существование $i\in I$, для которого $u=\varphi_i(x)$ и

$$(L\varphi_i(x)+g(x,\varphi_i(x)+)-p(x))\cdot$$
$$(L\varphi_i(x)+g(x,\varphi_i(x)-)-p(x))>0 \tag{3.5}$$

Определение 3.1.7. *Говорят, что для уравнения (0.1) выполнено A1-условие, если*

1) *выполняется (*);*

2) *найдется не более чем счетное семейство поверхностей $\{S_i, i\in I\}, S_i=\{(x,u)\in\mathbb{R}^{n+1}|u=\varphi_i(x), x\in\Omega\}, \varphi_i\in W^2_{loc,1}(\Omega)$, таких, что для почти всех $x\in\Omega$ неравенство $g(x,u-)<g(x,u+)$ влечет существование $i\in I$, для которого $u=\varphi_i(x)$*

и верно либо (3.5), либо

$$L\varphi_i(x)+g(x,\varphi_i(x))=p(x).$$

Сопоставим рассматриваемой краевой задаче (0.1)–(0.2) при фиксированном $p\in L_q(\Omega)$, $q>2n/(n+2)$, функционал $J_p: X\to\mathbb{R}$, где $X=\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$ в случае задачи Дирихле и $X=W^1_2(\Omega)$ в случае второй и третьей краевых задач, следующим образом: для задачи Дирихле и второй краевой задачи

$$J_p(u)=J_o(u)+G_p(u),$$

$$J_o(u)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}c(x)u^2(x)dx,$$

$$G_p(u)=\int\limits_{\Omega}dx\int\limits_{0}^{u(x)}g(x,s)ds-\int\limits_{\Omega}p(x)u(x)dx, \tag{3.6}$$

в случае третьего краевого условия (0.5)

$$J_p(u) = J_o(u) + \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} \sigma(s)u^2(s)ds + G_p(u). \qquad (3.7)$$

Теорема 3.2.1. *Предположим, что*

1) краевая задача (0.6)-(0.7) имеет ненулевое решение и $N(L)$ – подпространство всех ее решений;

2) если $Bu \equiv u$, то $J_0(u) \geq 0$ $\forall u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$,
если $Bu \equiv \frac{\partial u}{\partial n_L}$, то $J_0(u) \geq 0$ $\forall u \in W_2^1(\Omega)$,
если $Bu \equiv \frac{\partial u}{\partial n_L} + \sigma(x)u$, то $J_0(u) + \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} \sigma(s)u^2(s)ds \geq 0$ $\forall u \in W_2^1(\Omega)$;

3) выполняется (*) и (0.8);

4) функция $p \in L_q(\Omega)$ такая, что

$$\lim_{u \in N(L), \|u\| \to +\infty} G_p(u) = +\infty. \qquad (3.8)$$

Тогда существует $u_0 \in X$, для которого

$$J_p(u_0) = \inf_X J_p(u), \qquad (3.9)$$

причем любое такое $u_0 \in W_q^2(\Omega)$, удовлетворяет включению

$$-Lu_0(x) + p(x) \in [g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))] \qquad (3.10)$$

для почти всех $x \in \Omega$ и граничному условию (0.2). Если дополнительно предположить, что для уравнения (0.1) выполнено A-условие (A1-условие), то любое u_0, удовлетворяющее (3.9), является полуправильным (сильным) решением задачи (0.1)-(0.2).

Во **втором параграфе третьей главы** рассматриваются применения к задаче (0.1)–(0.2) результатов, доказанных во второй главе диссертации. Приведем формулировку доказанной теоремы.

Теорема 3.3.1. *Предположим, что*

1) *для уравнения (0.1) выполнено сильное A-условие;*

2) *Нелинейность $g(x,u)$ в уравнении (0.1) удовлетворяет условию (*);*

3) *для произвольного ненулевого решения v граничной задачи*

$$L^*v(x) = 0, \quad x \in \Omega \tag{3.25}$$

$$Bv + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\cos(n, x_j)v|_\Gamma = 0, \tag{3.26}$$

где

$$L^*v = -\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)v_{x_j}\right)_{x_j} - \sum_{j=1}^{n}\left(b_j(x)v\right)_{x_j} + c(x)v(x)$$

формально сопряженный с L дифференциальный оператор,

$$\int_\Omega r(x)v(x)\,dx < \int_{\Omega^+(v)} \underline{g}_+(x)v(x)\,dx + \int_{\Omega^-(v)} \overline{g}_-(x)v(x)\,dx \tag{3.27}$$

$$\left(\int_\Omega r(x)v(x)\,dx < \int_{\Omega^+(v)} \overline{g}_+(x)v(x)\,dx + \int_{\Omega^-(v)} \underline{g}_-(x)v(x)\,dx\right), \tag{3.28}$$

$$\overline{g}_\pm(x) = \limsup_{s\to\pm\infty} g(x,s), \quad \underline{g}_\pm(x) = \liminf_{s\to\pm\infty} g(x,s),$$

$$\Omega^\pm(v) = \{x \in \Omega \;:\; \pm v(x) > 0\}.$$

4) *существует линейный изоморфизм M между подпространствами $H^1(\Omega)$ решений задач* (0.6)–(0.7) *и* (3.25)–(3.26) *такой, что любое решение w задачи* (0.6)–(0.7) *почти всюду положительно (отрицательно) на $\Omega^+(Mw)$ ($\Omega^-(Mw)$).*

Тогда задача (0.1)–(0.2) *имеет полуправильное решение, принадлежащее пространству $W^2_q(\Omega)$.*

Список опубликованных работ

[1] Павленко В.Н., Винокур В.В. Вариационный метод для уравнений с некоэрцитивными разрывными операторами. // Тезисы докладов Всероссийской научной конференции, посвященной памяти В.К.Иванова. Екатеринбург, 1998. – С. 194-195.

[2] Винокур В.В. Существование полуправильных решений задачи Неймана для уравнения эллиптического типа с разрывной нелинейностью. // Тезисы докладов XXXVI международной научной конференции "Студент и научно-технический прогресс". Новосибирск, 1998. – С. 26-27.

[3] Павленко В.Н., Винокур В.В. О существовании сильных решений резонансных эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями. // Тезисы докладов на Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения - X". Воронеж, 1999. – С. 190.

[4] Павленко В.Н., Винокур В.В. О разрешимости уравнений с разрывными некоэрцитивными операторами. // Тезисы докладов на Воронежской весенней математической школе, Воронеж, 1999. – С. 154

[5] Винокур В.В. О разрешимости резонансных эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями. // Тезисы докладов международной научной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения". Челябинск, ЧелГУ, 1999. – С. 28.

[6] Pavlenko V.N., Vinokur V.V. Elliptic boundary value problems with discontinuous non-linearities at resonance. // Symposium Theory Of

partial differential equations and special topics of theory of ordinary differential equations. St. Petersburg, 2000. – P.49-50.

[7] Винокур В.В. Резонансные краевые задачи для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными нелинейностями. // Четвертый сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике, посвященный памяти М.А.Лаврентьева (1900–1980). Тез. докл., ч.I. – Новосибирск, Изд-во Ин-та математики, 2000. – С.47.

[8] Павленко В.Н., Винокур В.В. Резонансные краевые задачи для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями. // Известия вузов. Математика. 2001. – №5. – С. 43-57.

[9] Павленко В.Н., Винокур В.В. О существовании решений уравнений с разрывными некоэрцитивными операторами. // Тезисы докладов на Воронежской зимней математической школе. Воронеж, 2001. – С. 206.

[10] Винокур В.В. Существование полуправильных решений эллиптических резонансных краевых задач с разрывными нелинейностями. // Тезисы докладов Всероссийской конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач". – Екатеринбург, 2001. – С. 80–81.

Подписано в печать 01.08.2001

Формат 60×84/16. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,93. Тираж 100 экз. Заказ 15